الندوة الثالثة حول نظريات وتطبيقات العلوم الأساسية والحيوية
السبت 3 سبتمبر 2016
www.misuratau.edu.ly

النسبة الذهبية ومتتالية فيبوناتشي

منال الطاهر يونس الزيداني
قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا

الخلاصة:
تهتم هذه الدراسة بالنسبة الذهبية التي تتكون من العددين الذهبيين، حيث أن العدد الذهبي يعتبر العدد الذي يكون لتربعه نضيف إليه العدد واحد وكيفية الحصول على هذا العدد، و وجد أن هناك عددان يحققان هذه الخاصية، وأن هذان العددان لهما خواص مشتركة وحقائق عجيبة في علوم الرياضيات والطبيعة، السبب الذي جعل العلماء يطلقون على هذه الأعداد بالأعداد الذهبية.

الكلمات المفتاحية: النسبة، الذهبية، خواص، مشتركة، الأعداد الذهبية

المقدمة INTRODUCTION

هذا البحث يختص بدراسة النسبة الذهبية التي تتكون من العددين الذهبيين، حيث أن العدد الذهبي هو العدد الذي يكون لتربعه نضيف إليه العدد واحد وكيفية الحصول على هذا العدد حيث وجد أنه هناك عددان يحققان هذه الخاصية وأن هذان العددان لهما خواص مشتركة وحقائق عجيبة في الرياضيات وفي الطبيعة السبب الذي جعل العلماء يطلقون على هذه الأعداد بالأعداد الذهبية، فقد لوحظ أن كلا العددين هو المقلوب الحسابي للعدد الأخر وأن العددين متطابقين بعد العلامة العشرية وكذلك من أهم خصائص هذه الأعداد علاقتهما بمتتالية فيبوناتشي التي اكتشفها العالم الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي والتي تعرف بشكل مبسط بأنها متتالية الأعداد التي ينتج كل عدد فيها عن مجموع العددين السابقين له والتي حداها الأولان يساويان الواحد، حيث أنه عند قسمة كل عدد من المتتالية على العدد الذي يسبقه نلاحظ أن الناتج يقترب شيئا فشيئا من العدد الذهبي، وقد لوحظ وجود النسبة الذهبية في الطبيعة حيث استخدمت في الفن والبناء والتصميم، وفي دوائر الموجات الصوتية وفي أشكال الذبذبات ومنحنى ذبذبة دقات قلب الإنسان وفي علاقات رياضية عديدة، أما تاريخيا فتأتي الأهرامات في مقدمة المعالم التي خضعت للنسبة الذهبية بالرغم من أنها لم تكن قد اكتشفت علميا بعد. ويعرف العدد الذهبي على أنه، عدد عند تربيعه نضيف إليه العدد 1 أي أن هو العدد x الذي يحقق: $x^2 = x+1$
في الحقيقة هناك عددان بهذه الخاصية يتم إيجادها كالآتي :

$$x^2 = x+1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

هذه المعادلة من الدرجة الثانية يمكن حلها باستخدام القانون :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث أن: $a=1$ ، $b=-1$ ، $c=-1$

$$\therefore \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 1.618033887\ldots \quad , \quad -0.618033887\ldots$$

نلاحظ أن الأجزاء العشرية تكون متماثلة.
لذا هناك عددان عند إضافتهما إلى الواحد الصحيح يعطينا مربعاتهم، وقد لوحظ أن هذين الرقمين مدهشين بطريقة تثير الإعجاب والانتباه ليس فقط لأن الرقمين متماثلين بعد العلامة العشرية، بل أيضا لأن كلا من الرقمين يمثل المقلوب الحسابي للأخر (لو قسمنا 1 على أي رقم منهما فسوف يعطينا الرقم الأخر)، هذين هما الرقمين الوحيدين اللذان يحققان هذه الخاصية.

استعمل عالم الرياضيات الأمريكي مارك بار (mark barr) الحرف اليوناني (phi) و (ϕ) لتمثيل النسبة الذهبية حيث استعمل الحروف الأولى من اليوناني فيدياس (phidias) الذي استعمل النسبة الذهبية في نحته.

ملاحظة

سنسمي القيمة الأولى الأكبر $phi = 1.618033887...$

والثانية الأصغر $\hat{phi} = -0.618033887...$

متتالية فيبوناتشي

فيبوناشي: عالم رياضيات أوروبي اسمه الكامل ليونارد فيبوناتشي من بيسا, أو ليوناردو بيسانو الإيطالي, ولد في بيسا (إيطاليا), حوالي 1175 ميلادية كان فيبوناتشي، الرياضي اللامع، الذي يدعى أيضًا بلورنزو البيزاني Lorenzo da Pisa، قد سافر إلى البلاد العربية وتعلَّم الرياضيات من كبار معلِّميها، وربما كان قد اطَّلع على متتالية عمر الخيام، لكن هذا لا يمنع أبدًا أنه كان أول من دَرَس هذه المتتالية في شكل وافٍ في مؤلَّفه Liber Abacci الذي وضعه في العام 1202.

تتألف متتالية فيبوناتشي من الأرقام التالية: 1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، 21، 34، 55، ... وتعرِّف متتالية فيبوناتشي، في شكل مبسَّط، بأنها متتالية الأرقام التي ينتج كلُّ رقم فيها عن مجموع الرقمين السابقين له، والتي حداها الأولان يساويان الواحد, أي أن:

$$f_{(1)} = 1$$
$$f_{(2)} = 1$$
$$f_{(3)} = 1 + 1 = 2$$
$$f_{(4)} = 1 + 2 = 3$$
$$f_{(5)} = 2 + 3 = 5$$

وبصيغة عامة إذا كان $n \geq 3$, فإن :

$$f_{(n)} = f_{(n-2)} + f_{(n-1)}$$

العدد $f_{(n)}$ يسمى عدد فيبوناشى الذي ترتيبه n.

حاول بعض العلماء أن يقدروا النسبة بين كل رقمين متتابعين فقاموا مثلاً بقسمة كل رقم على الرقم السابق له ، فاكتشفوا أن هذه المتتالية تنفرد بخصائص كثيرة منها العلاقة مع الرقم الذهبي ، ذلك أنه إذا اعتبرنا قسمة كل عدد من المتتالية على العدد الذي يسبقه (1÷1=1 ، 2÷1=2 ،3÷2 = 1.5 ، 5÷3=1.6660000 ،8÷5= 1.6 ، 13÷8 = 1.625، 21÷ 13= 1.61538 ، ...) نلاحظ بأننا نقترب شيئا فشيئا من الرقم 1.618034 الذي يسمى الرقم الذهبي، ويمكن استنتاج ذلك من علاقة فيبوناتشي

$$f_{(i+2)} = f_{(i+1)} + f_{(i)}$$

إذا أخذنا 3 أعداد فيبوناتشي متجاورة $f_{(i)}$ $f_{(i+2)}$, $f_{(i+1)}$, عندها نسبة $f_{(i)}$, $f_{(i+1)}$ ستكون تقريباً تماماً مثل نسبة $f_{(i+1)}$, $f_{(i+2)}$ إذاً :

$$\frac{f_{(i+1)}}{f_{(i)}} = \frac{f_{(i+2)}}{f_{(i+1)}} = X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

وباستعمال علاقة فيبوناتشي يمكن أن نستدل $f_{(i+2)}$ بـ $f_{(i+1)} + f_{(i)}$

$$\frac{f_{(i+2)}}{f_{(i+1)}} = \frac{f_{(i+1)} + f_{(i)}}{f_{(i+1)}} = \frac{f_{(i+1)}}{f_{(i+1)}} + \frac{f_{(i)}}{f_{(i+1)}}$$

$$= 1 + \frac{f_{(i)}}{f_{(i+1)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

بالتعويض بالعلاقة (2) في (1) نجد أن:

$$X = \frac{f_{(i+1)}}{f_{(i)}} = 1 + \frac{f_{(i)}}{f_{(i+1)}} \quad (3) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

من (1) نجد أن:

$$\frac{f_{(i)}}{f_{(i+1)}} = \frac{1}{X}$$

بالتعويض في العلاقة (3) نجد أن:

$$X = \frac{f_{(i+1)}}{f_{(i)}} = 1 + \frac{f_{(i)}}{f_{(i+1)}} = 1 + \frac{1}{X}$$

أي أن:

$$X = 1 + \frac{1}{X} \quad \Rightarrow \quad X^2 = X + 1$$

رأينا هذه المعادلة قبل ذلك في التعريف البسيط لـ phi ، وهذا يثبت أن X (عدد فيبوناشي) هو بالضبط phi .
هذا البرهان يوضح أن نسبة زوجين متجاورين في سلسلة فيبوناتشي لها نفس القيمة، هذا فقط يحدث في النهايات، فقد استنتج العلماء أن النسبة تقترب أكثر فأكثر إلى القيمة النهائية، أو بمعنى أخر النسب تقترب أكثر فأكثر إلى phi .

القيمة الأخرى $\hat{phi} = -0.618033887...$ نحصل عليها إذا مددنا متسلسلة فيبوناتشي خلفياً وأبقينا نفس العلاقة (علاقة فيبوناتشي) نستطيع إيجاد الأعداد الأصغر من الصفر، الجدول التالي يوضح ذلك:

I	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	...
$f_{(i)}$	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55	...

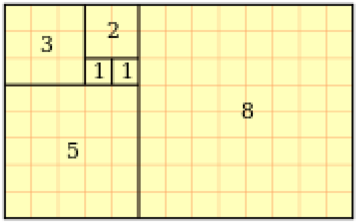
عندما نستعمل متسلسلة فيبوناتشي الكاملة ونحسب النسب $\frac{f_{(i)}}{f_{(i-1)}}$ على الجهة اليسرى للصفر نجد أن النسب تقترب أكثر فأكثر إلى العدد ...-0.618033887

وبعد محاولة التوصل إلى النسبة بين 40 رقم متتالي في متوالية فيبوناتشي وجدوا انه يمكن تقريب هذا الرقم إلى 15 رقم عشري...1.618033988749895

تتكون النسبة الذهبية من رقمين هما 1.618034 و 0.618034 وكلا الرقمين هو المقلوب الحسابي للرقم الأخر (لاحظ أن الرقمين متطابقين بعد العلامة العشرية) لذلك فأن بعض محاولات تمثيل هذه النسبة تتشكل بواسطة رسم مستطيل أضلاعه تساوي 0.618034 إلى 1 أو (1 إلى 1.618034) فكلاهما يعطي نفس المستطيل بنفس النسبة بين أطوال أضلاعه.

مستطيل فيبوناتشي

مستطيل فيبوناتشي هو طريقة لتمثيل متتالية فيبوناتشي هندسياً، إذ نستطيع أن نحصل على متتالية فيبوناتشي إذا رسمنا مربعين متجاورين طول الضلع فيهما وحدة واحدة، ثم رسمنا مربعاً طول ضلعه 2 وحدة (1+1) بحيث يكون منشأ على مربعين متجاورين، ثم نرسم مربعاً طول ضلعه 3 وحدات (2+1) منشأ على المربعين السابقين وهكذا لاحظ الشكل (1).



الشكل (1)

phi عدد غير قياسي

نفرض أن phi عدد قياسي، أي يمكن كتابته على شكل $phi=\frac{p}{q}$ ، حيث q , p أعداد صحيحة لا عوامل مشتركة بينهما. من تعريف phi :

$$phi^2 - phi = 1 \qquad ....(*)$$

من الفرض phi يمكن أن يكتب $\frac{p}{q}$ ، إذاً نستبدل phi بـ $\frac{p}{q}$ ، $q \neq 0$ نحصل على:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} = 1 \quad ; \quad q \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad p^2 - pq = q^2 \qquad .... (**)$$

$$\Rightarrow \quad p(p-q) = q^2$$

ومن الفرض أن p , q لا يوجد بينهما عوامل مشتركة إلا الواحد (1)، إذاً p يجب أن يكون 1

من إعادة ترتيب المعادلة (* *) نحصل على:

$$p^2 = pq + q^2 = q(p+q)$$

وبما أن p , q ليس لهما عوامل مشتركة عدا الواحد (1)، إذاً q يجب أن يكون (1).

بما أن p , q كلاً منهما يساوي الواحد (1), إذاً $\frac{p}{q}=1$ ، وهذا لا يحقق المعادلة الأصلية (*)

إذاً من الاستحالة أن نكتب phi ككسر حقيقي، أي أن phi عدد غير قياسي.

التقريبات القياسية لـ phi

حيث أنه لا يوجد أي كسر يكون هو القيمة المضبوطة لـ phi ولكن توجد كسور ذات تقريبات جيدة لـ phi ، ويمكن الحصول على القيم التي تقترب من phi كالتالي:

$$phi = 1$$

$$phi = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

التقريب التالي يكون دائما 1 مضاف إليه المعكوس الضربي للتقريب، ومن الواضح أن المتسلسلة الكسرية السابقة هي النسب لأعداد فيبوناتشي

إن التعبير الرياضي الصحيح لهذه الكسور و التي صيغت من إيقاف الكسر المستمر لـ phi عند نقاط مختلفة يكون تقريبات لـ phi .

المتسلسلة من التقريبات تكون على الصورة:

$$\frac{1}{1} ، \frac{2}{1} ، \frac{3}{2} ، \frac{5}{3} ، \frac{8}{5} ، \frac{13}{8} ، \frac{21}{13} ، \ldots$$

العلاقة بين أعداد فيبوناتشي والتقريبات القياسية لـ phi

من الواضح أن أعداد فيبوناتشي تظهر في التقريبات القياسية لـphi ، فالحد الأول في متسلسلة التقريبات هو $\frac{1}{1}$ والذي يكون $\frac{f_{(1)}}{f_{(0)}}$ ، لكي نحصل على كسر من كسر أخر أو تالي له نأخذ المعكوس الضربي للكسر ونضيف إليه واحد .

إذاً التالي بعد $\frac{f_{(1)}}{f_{(0)}}$ يكون :

$$1 + \frac{1}{f_{(1)}/f_{(0)}} = 1 + \frac{f_{(0)}}{f_{(1)}} = \frac{f_{(1)} + f_{(0)}}{f_{(1)}}$$

لكن أعداد فيبوناتشي لها الخاصية التي تضيف عددين متعاقبين لإعطاء التاليين لذلك $f_1 + f_0 = f_2$ ، إذاً الكسر التالي يمكن أن يكتب كما يلي :

$$1 + \frac{1}{f_{(1)}/f_{(0)}} = 1 + \frac{f_{(0)}}{f_{(1)}} = \frac{f_{(2)}}{f_{(1)}}$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على كل نسب فيبوناتشي المتعاقبة، معنى ذلك إذا كان لدينا $\frac{f_{(n)}}{f_{(n-1)}}$ ، فإن الحد الذي يليه هو $\frac{f_{(n+1)}}{f_{(n)}}$ والذي يكون الأقرب إلى phi من الحد السابق له، لو أننا كتبنا هذه الحدود على صورة متتالية حدها العام هو: $\frac{f_{(n)}}{f_{(n-1)}}$ فنجد أن قيم الحدود تقترب أكثر فأكثر إلى phi كلما زادت قيمة n .

الأعداد المتماثلة

روبرت كير باكستر(Robert Kerr Baxter) كتب حول الأعداد والتي لها الخاصية phi والتي عندما نربع أجزاؤها العشرية تبقي بدون تغير مثل :-

$$phi = 1.618033... \quad \Rightarrow \quad phi^2 = 2.618033...$$

حيث $$phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

لاحظ روبن بأن هذا يحدث أيضا إذا استبدلنا $\sqrt{5}$ بـ $\sqrt{13}$ أو $\sqrt{17}$ أو $\sqrt{21}$ ...... فمثلاً:

$$\frac{\sqrt{13}+1}{2} = 2.30278 \quad و \quad \left(\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)^2 = 5.30278$$

$$\frac{\sqrt{17}+1}{2} = 2.56155 \quad و \quad \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^2 = 6.56155$$

إذاً سلسلة الأعداد تكون : $(1), 5, (9), 13, 17, 21, (25), 29 \ldots$

لاحظ الأعداد (9) , (25) والتي تكون مربعاً كاملاً يمكن إيجاد صيغه لهذه الأعداد: إذا طرحنا x من x^2 الناتج سيكون عدد صحيح لأن الأجزاء العشرية مماثلة أي أن:

$$x^2 - x = N \;; \quad N \text{ عدد صحيح} \qquad \text{أي أن:} \qquad x^2 - x - N = 0$$

هذه معادلة من الدرجة الثانية يمكن حلها باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

إذاً

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4N}}{2}$$

يمكن أن نرى هنا تحت إشارة الجذر التربيعي العدد 1 مضافاً إليه مضاعفات العدد 4 الذي يعطي السلسلة:

$$N = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad .....$$

$$1+4N = \quad 5 \quad 9 \quad 13 \quad 17 \quad 21 \quad 25 \quad ......$$

علي سبيل المثال إذا اخترنا $N = 5$، فإن:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4(5)}}{2} = 2.79128747$$

$$x^2 = 7.791287847 = 5 + x$$

أي العدد x عندما نربعه يزيد بالضبط 5 عن العدد x .

النسبة الذهبية في الأشكال الهندسية

توجد النسبة الذهبية في شكل خاص في المخمَّس المنتظم وفي المضلَّع ذي العشرة أضلاع المنتظم، والمخمَّس المنتظم هو مخمَّس المعرفة، وهو النجمة الخماسية العزيزة على الفيثاغوريين.

ويمكن أن تتحقق النسبة الذهبية في شكل خاص في المثلث الذهبي (أطوال أضلاعه 1، phi ، $\sqrt{phi}$)الذي يحقق قاعدة فيثاغوراس، أي أن وتره هو قطر الدائرة المارة بروؤسه.

وكذلك تشتهر هذه النسبة في المستطيل الذهبي (طول ضلعيه 1 و phi)، ويتصف هذا المستطيل بخواص مدهشة لما له من تأثير على الحسّ الجمالي عند الإنسان، وهو يُعَدُّ قاعدة العمارة الأولى بحق عند القدماء، وقد وُجِدَ في أبنية كثيرة عند حضارات المتوسط القديمة.

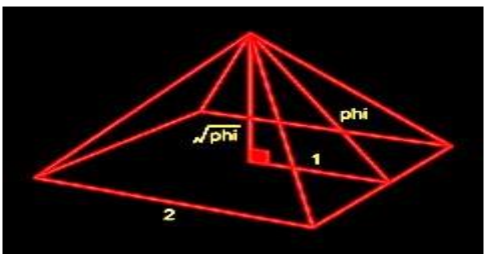
phi والأهرام المصرية

العالم بابيروس (papyrus) حوالي 1650 قبل الميلاد أخذ أقدم الأعمال الرياضية في الوجود والذي يعطي الطرق والمسائل المستعملة من قبل البابليين و المصريين القدماء، يتضمن الحل لبعض المسائل حول الأهرام لكنها لا تذكر أي شيء حول النسبة الذهبية phi حيث أنه تم العثور على أول دليل لهذه النسبة الذهبية في أعمال البناء والتي تتجلى فيها خصائص هذه النسبة المدهشة في أهرامات الجيزة الموضحة في الشكل (2)، والتي يبدو أنها بنيت اعتماداً على النسبة 5 إلى 8 بين الارتفاع والقاعدة، أي حوالي (0.625) والتي تمثل نسبة قريبة جداً من النسبة الذهبية الكاملة (0.618034)، كذلك نسبة طول وجه الهرم الأعظم (من مركز القاع للوجه إلى قمة الهرم) إلى المركز المضبوط لمربع الهرم الأساسي يساوي تقريباً 1.6 هو مسألة نقاش للعلماء سواء هذا المقطوع يكون عدد القسم الذهبي أم لا، على أن العلماء يختلفون حول ما إذا كان المصريون على علم فعلاً بهذه النسبة أم لا.

حسب رأي إلمرروبنسون (Elmer Robinson)، باستخدام متوسط ثمانية فئات من المعطيات تنص على نظرية أن محيط الهرم مقسوماً على ضعفي ارتفاعه الرأسي يكون قيمته phi .

الشكل (2)

وإذا لم يكن المجال يسمح لنا بدراسة هذه المجسَّمات التي كان أفلاطون قد صنَّفها، فإننا سنكتفي بإلقاء الضوء على أحد أشكال رباعي الوجوه، ولعله أشهرها على الإطلاق، هرم خوفوالموضح في الشكل (3).



الشكل (3)

إذا أخذنا مسقطًا طولياً يمر من منتصف ضلعي المربع القاعدة، فإننا نجد مثلثًا متساوي الساقين، طول كلٍّ منهما phi ، وارتفاع المثلث هو ارتفاع الهرم، ويساوي $\sqrt{phi}$ ، هذا إذا اعتبرنا أن قاعدة المثلث تساوي 2؛ أي أن هذا المثلث مؤلَّف من مثلثين ذهبيين، ويشير هيرودوت إلى التناسبات القائمة في الهرم بقوله: "لقد أعلمني الكهنة المصريون أن التناسبات المُقامة في الهرم الأكبر بين جانب القاعدة والارتفاع كانت بحيث تسمح بأن يكون المربع المُنشأ على الارتفاع يساوي بالضبط مساحة كلٍّ من وجوه الهرم المثلثة." ترى هل إنشاء مثل هذا المربع كان يُقصَد منه الإشارة إلى العلاقة

بين π و phi ، حيث إن العدد π قائم في الهرم من خلال نسبة الارتفاع إلى نصف محيط القاعدة، على أية حال، يجب أن نلاحظ أن خصائص هذا الهرم توافق كلَّ هرم ميله 11/14 (الموافق لزاوية ميل 51 درجة و50 دقيقة و35 ثانية)، وهي بالتالي لا تخص هرم خوفو فقط. فقبل حكم هذا الملك كانت هذه النسبة موجودة في هرم ميدوم عندما كان غطاؤه لا يزال موجودًا. ويثبت ذلك أن هذه النِّسَب كانت موجودة في مَيَلان واجهات الأهرامات في السلالة الثالثة.
ونشير هنا إلى أن الكلام على الإهراملت لا ينتهي، لكننا نشير في النهاية إلى أنه إذا كان ليس من المؤكد معرفة إذا كان المصريين عرفوا هذه النسبة أم لا، فليس هناك شك في أن الإغريق كانوا على علم بها وأنهم قد تمكنوا من حسابها ، وأطلقوا عليها "النسبة الذهبية"، ليس معروفا لماذا؟ أو كيف؟، يبدوا أنهم شعروا بأن هذه النسبة رائعة في شكلها ومعطياتها، وقد قاموا بدمجها في الكثير من الأعمال الفنية والمباني الخاصة بهم، وأشهرها على الإطلاق مبنى البارثينون وهو أحد أشهر معالم اليونان التي تقوم على النسبة الذهبية عن قصد، ورغم كل الأضرار التي لحقت به مع توالي القرون المديدة، فقد ظل محافظاً على جوهر جماله، ويأتي جامع عقبة في القيروان ليكون العمل الأشهر من العمارة الإسلامية الذي مثل النسبة الذهبية في كثير من أجزاءه، من المساحة الكلية، إلى مساحة فناء المسجد، إلى حتى التناسب المبهر في المنارات.

REFERENCES **المراجع**

[1] د.جمعة سويسي، د.عبد السلام القلالي، الصادق كرواط، سلسلة أصول الرياضيات- مقدمة في مجموعات الأعداد، الطبعة الأولى، بيروت 1991 ، دار الكتب الوطنية – بنغازي
[2] ديفيد برغاميني، الرياضيات، بترجمة نجاح شمعة قدورة، سلسلة تبسيط العلوم 9، وزارة الثقافة، دمشق، 1969
[3] http:// www.mcs.surrey.ac.uk/personal/R.knott/Fibbonacci/phi.html